

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

Cuarta Fase – Nivel 2

25 de noviembre de 2006

- *La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Entrega tu cuadernillo de soluciones **justificando** adecuadamente todos los pasos.*
- *Puedes llevarte las hojas con los enunciados de los problemas.*

**JUSTIFICA ADECUADAMENTE TODOS LOS PASOS DE TUS SOLUCIONES**

1. Sea  $x$  un entero positivo tal que los números  $6x + 1$ ,  $7x + 4$  y  $8x + 9$  son todos cuadrados perfectos. Prueba que  $x$  es múltiplo de 20.
2. Halla todos los polinomios no nulos  $P(x)$  y  $Q(x)$  tales que  $P(Q(x))=P(x) \cdot Q(x)$ , para todo número real  $x$ .
3. Encuentra todos los pares de enteros positivos  $(a, b)$  tales que  $a^2 + a + 2b$  y  $b^2 + b + 2a$  sean cuadrados perfectos.
4. En una secuencia de 900 términos, donde cada uno vale 1, 2 ó 3, se cumple que en 5 términos consecutivos cualesquiera hay por lo menos un 1, en 4 términos consecutivos cualesquiera hay por lo menos un 2 y en 3 términos consecutivos cualesquiera hay por lo menos un 3. ¿Cuál es la mayor cantidad de **unos** que puede tener la secuencia?

**GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN**