

OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA 2006

Cuarta Fase – Nivel 3

25 de noviembre de 2006

- *La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.*
- *No está permitido el uso de calculadoras, ni consultar notas o libros.*
- *Entrega tu cuadernillo de soluciones **justificando** adecuadamente todos los pasos.*
- *Puedes llevarte las hojas con los enunciados de los problemas.*

JUSTIFICA ADECUADAMENTE TODOS LOS PASOS DE TUS SOLUCIONES

1. Halla todos los valores enteros positivos que puede tomar n tal que
$$\cos(2x) = \cos^n x - \sin^n x$$
para todo número real x .
2. Halla todos los valores de k para los cuales es posible dividir cualquier región triangular en k cuadriláteros de igual área.
3. Un par (m, n) de enteros positivos se denomina “enlazado” si m divide a $3n + 1$ y n divide a $3m + 1$. Si a, b, c son enteros positivos distintos tales que (a, b) y (b, c) son pares enlazados, demuestra que el número 1 pertenece al conjunto $\{a, b, c\}$.
4. En cada una de las casillas de un tablero de $n \times n$, con $n \geq 3$, se escribe un número entero positivo de tal modo que el valor absoluto de la diferencia de los números escritos en dos casillas vecinas cualesquiera es menor o igual que 2 (dos casillas vecinas son aquellas que tienen un lado común).
 - a) Muestra un tablero de 5×5 en el cual se hayan escrito 15 números enteros distintos siguiendo la regla indicada.
 - b) Halla, en función de n , la máxima cantidad de números distintos que puede tener el tablero de $n \times n$ casillas.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN