

Solucionario – Cuarta fase ONEM 2006

Noviembre 2006

Este documento fue preparado por:

John Cuya Barrios.

Claudio Espinoza Choqquepura.

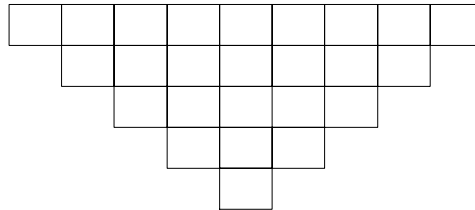
Sergio Vera Patiño.

Jorge Tipe Villanueva.

miembros de la Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana,
encargada de crear y seleccionar los problemas para la ONEM.

Nivel 1.

1. Considera un tablero de 25 casillas como el que se muestra en la figura.



En cada una de las casillas de la primera fila se escribe una letra A o una letra B y luego se completa, con letras, de acuerdo con la siguiente regla: si se eligen tres casillas consecutivas de una fila entonces se escribe debajo de la casilla del centro la letra que aparece más veces en las 3 casillas escogidas. Por ejemplo, si se tiene:

A	B	A
	?	

entonces en la casilla marcada con “?” se debe escribir la letra A. ¿Cuál es la mínima cantidad de letras A que se debe escribir en la primera fila para asegurar que, en cualquier orden en que estas se escriban, siempre se tenga una letra A en la casilla de la última fila?

(Jorge Tipe Villanueva)

Solución

Vamos a demostrar que la mínima cantidad de letras A necesaria es 8 y la demostración consta de 2 partes:

- a) **Si escribimos 8 letras A en cualquier orden en la primera fila garantizamos que en la última casilla esté la letra A.**

En efecto, como hay solamente una letra B siempre que elijamos 3 casillas consecutivas en la primera fila la letra A aparece más veces, luego en la segunda fila todas son letras A y en la tercera, cuarta y quinta. También todas son letras A, en particular, la última casilla también tiene una letra A.

b) **Si escribimos menos de 8 letras A no garantizamos que la última sea también A.**

Como tenemos menos de 8 letras A, tenemos al menos dos letras B. Enumeremos las casillas de la primera fila con 1, 2, 3, ..., 9 y escribamos 2 letras, B en las casillas 5 y 6 (no importa qué letras estén en las otras casillas) vamos a demostrar que con esta distribución la última casilla necesariamente es B y con esto habremos terminado esta parte de la demostración

				B	B			
				<i>x</i>	<i>Y</i>			
				<i>z</i>	<i>W</i>			
				<i>p</i>	<i>q</i>			
				<i>r</i>				

Notamos que arriba de la casilla que tiene *x*, ya hay 2 B's, esto garantiza que B aparezca más veces, luego $x = B$, análogamente $y = B$. Como *z*, *w* tienen arriba dos letras B, entonces $z = w = B$, siguiendo el mismo proceso tenemos $p = q = B$ y, finalmente, $r = B$, que era lo que queríamos probar.

2. Encuentra todos los enteros positivos n que tienen 12 divisores que cumplen las dos condiciones siguientes:

- Ordenados de menor a mayor son:

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 < d_7 < d_8 < d_9 < d_{10} < d_{11} < d_{12} = n$$

- $d_3 + d_6 = 14$.

(John Cuya Barrios)

Solución

Tengamos en cuenta lo siguiente

- $d_3 \geq 3$, ya que es mayor que otros dos números.
- $d_6 - d_3 \geq 3$, ya que otros dos números están entre ellos.
- n tiene como máximo 3 divisores primos, ya que de lo contrario, si tuviese 4 divisores primos o más, tendría 16 divisores o más.

Entonces las soluciones de $d_3 + d_6 = 14$ son

- (a) $d_3 = 3, d_6 = 11$
- (b) $d_3 = 4, d_6 = 10$
- (c) $d_3 = 5, d_6 = 9$

En todos los casos $d_1 = 1$, en el caso (a) $d_2 = 2$, entonces 6 es divisor de n , luego uno de d_4 ó d_5 es 6 y el otro tiene que ser compuesto puesto que n ya tiene 3 divisores primos y no puede tener más, entonces $d_4 = 4$, $d_5 = 6$ ó $d_4 = 6$, $d_5 = 9$, de donde $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$ ó $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 198$.

En el caso (b) 2 y 5 son divisores de n , ya que 10 lo es, entonces $d_2 = 2$ y $d_4 = 5$. ni 6 ni 9 son divisores de n ya que 3 no lo es, entonces $d_5 = 7$ ó 8, si $d_5 = 7$, entonces $n = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$; si $d_5 = 8$, los únicos factores de n son 2 y 5, entonces $n = 2^5 \cdot 5 = 160$ ó $n = 2^3 \cdot 5^2 = 200$.

En el caso (c) $d_2 = 3$, entonces ni 6 ni 8 pueden ser divisores de n , entonces no hay valores para d_4 y d_5 .

Por lo tanto, los valores que puede tomar n son 132, 140, 160, 198 y 200.

3. Sea T un conjunto formado por enteros positivos que tiene la siguiente propiedad: si x, y son elementos distintos de T , con $x > y$, entonces $x - y$ tiene todos sus dígitos en el conjunto $\{2; 3; 6; 9\}$.

¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puede tener T ?

(Jorge Tipe Villanueva)

Solución

Vamos a demostrar que la máxima cantidad es 5 y la demostración consta de 2 partes

- a) **Dar un ejemplo de un conjunto T con 5 elementos que cumpla la propiedad mencionada**

Basta tomar $T = \{1, 4, 7, 10, 33\}$ pues las diferencias son:

$$\begin{aligned} 4 - 1 &= 3, & 7 - 1 &= 6, & 10 - 1 &= 9, & 33 - 1 &= 32, \\ 7 - 4 &= 3, & 10 - 4 &= 6, & 33 - 4 &= 29, \\ 10 - 7 &= 3, & 33 - 7 &= 26, \\ 33 - 10 &= 23, \end{aligned}$$

y notamos que todas las diferencias tienen sus dígitos en el conjunto $\{2, 3, 6, 9\}$.

- b) **Demostrar que si un conjunto T tiene 6 o más elementos entonces no tiene la propiedad mencionada.**

En efecto, si tuviera más de 5 elementos, por el Principio de Casillas, habría 2 de ellos que dejan el mismo resto al ser divididos por 5 (son 5 restos posibles), denotemos con m y n a estos números y supongamos, sin pérdida de generalidad que $m > n$, con esto $5 \mid m - n$, es decir el último dígito de $(m - n)$ es 0 ó 5, lo cual no es posible pues ninguno de ellos está en el conjunto $\{2, 3, 6, 9\}$.

4. Un tablero se denomina “completable” si es posible escribir en cada una de sus casillas un entero positivo de acuerdo con las siguientes reglas:
- En cada columna, el número de cada casilla es menor o igual que el número de cualquier casilla superior
 - En cada fila, el número de cada casilla es menor o igual que el número de cualquier casilla a su derecha.
 - Para dos cuadrados cualesquiera de cuatro casillas cada uno, si R es la suma de los números escritos en uno de ellos y S es la suma de los números escritos en el otro entonces $R \neq S$.

¿Analiza si los siguientes tableros son completables.

					9
1					

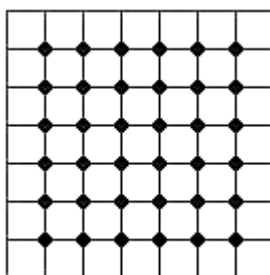
(I)

					7
1					

(II)

*(John Cuya Barrios)***Solución**

(a) Por las condiciones del problema se tiene que en cada casilla sólo se puede escribir alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9, entonces el valor que puede tomar la suma de los números escritos en un cuadrado de 2×2 es mayor o igual que 4 y menor o igual que 36, entonces la cantidad de valores distintos que puede tomar la suma de los números escritos en un cuadrado de 2×2 es como máximo 33 (desde el 4 al 36 inclusive), pero la cantidad de cuadrados de 2×2 es igual a 36, ya que se puede calcular como la cantidad de centros



Por lo tanto la suma de los 4 números escritos en cada cuadrado de 2×2 no puede ser diferente.

(b) Por las condiciones del problema se tiene que en cada casilla sólo se puede escribir alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 ó 7. En este caso el llenado del tablero es posible:

4	4	6	6	7	7
2	4	5	6	7	7
2	2	4	5	6	7
1	2	3	4	6	6
1	1	2	3	4	6
1	1	2	2	4	4

Nivel 2.

1. Sea x un entero positivo tal que los números $6x + 1$, $7x + 4$ y $8x + 9$ son todos cuadrados perfectos. Prueba que x es múltiplo de 20.

(Claudio Espinoza Choqqepura)

Solución

Tenemos que $6x + 1$, $7x + 4$ y $8x + 9$ son cuadrados perfectos, para probar que $20 \mid x$, basta con probar que $4 \mid x$ y $5 \mid x$.

a) $x \equiv 0 \pmod{4}$

Para probar esto vamos a proceder por contradicción,

Si $x \not\equiv 0 \pmod{4}$ entonces x es congruente con 1, 2, ó 3.

- Si $x \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 6x + 1 \equiv 3 \pmod{4} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$
- Si $x \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 7x + 4 \equiv 2 \pmod{4} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$
- Si $x \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow 6x + 1 \equiv 3 \pmod{4} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$

Las contradicciones provienen del hecho que los cuadrados perfectos son congruentes a 0 ó 1 módulo 4 únicamente. Como hemos llegado a contradicciones en los tres casos, concluimos que $x \equiv 0 \pmod{4}$.

b) $x \equiv 0 \pmod{5}$

Ya sabemos por a) que x es par, por contradicción también, si $x \not\equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{10}$ y como x es par $\Rightarrow x \equiv 2 \pmod{10}$, $x \equiv 4 \pmod{10}$, $x \equiv 6 \pmod{10}$ ó $x \equiv 8 \pmod{10}$.

- Si $x \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 6x + 1 \equiv 3 \pmod{10} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$
- Si $x \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 7x + 4 \equiv 2 \pmod{10} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$
- Si $x \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 6x + 1 \equiv 7 \pmod{10} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$
- Si $x \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 8x + 9 \equiv 3 \pmod{10} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$

Las contradicciones provienen del hecho que los cuadrados perfectos son congruentes a 0, 1, 4, 9, 6, ó 5 módulo 10 únicamente. Como en los 4 casos llegamos a contradicciones concluimos que $x \equiv 0 \pmod{5}$.

De a) y b) tenemos que $20 \mid x$.

Observación: El mínimo entero positivo x que hace que $6x + 1$, $7x + 4$ y $8x + 9$ sean cuadrados perfectos es $x = 20$, pues $6 \cdot 20 + 1 = 11^2$, $7 \cdot 20 + 4 = 12^2$ y $8 \cdot 20 + 9 = 13^2$.

2. Halla todos los polinomios no nulos $P(x)$ y $Q(x)$ tales que $P(Q(x)) = P(x) \cdot Q(x)$, para todo número real x .

(Claudio Espinoza Choqqepura)

Solución

Como $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios no nulos, podemos escribir:

$$P(x) = a_m x^m + \dots + a_0 x^0 \quad ; \quad m \geq 0, \quad a_m \neq 0$$

$$Q(x) = b_n x^n + \dots + b_0 x^0 ; \quad n \geq 0, \quad b_n \neq 0$$

$$\Rightarrow [P(Q(x))]_0 = [P(x) \cdot Q(x)]_0$$

$$mn = m + n \quad \Rightarrow \quad (m-1)(n-1) = 1$$

$$\Rightarrow m = 2 \text{ y } n = 2 \quad \vee \quad m = 0 \text{ y } n = 0.$$

1er Caso: $m = 2, n = 2$

$$P(x) = ax^2 + bx + c; \quad Q(x) = mx^2 + nx + p;$$

$$a, m \neq 0$$

$$\text{coef. princ. } [P(x) Q(x)] = \text{coef. princ. } [P(Q(x))]$$

$$\Rightarrow am = am^2$$

$$\text{Como } a, m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1$$

$$\Rightarrow G(x) = x^2 + nx + p$$

* Si $P(x)$ fuese mónico, es decir $a = 1$.

$$\Rightarrow (x^2 + bx + c)(x^2 + nx + p) = (x^2 + nx + p)^2 + b(x^2 + nx + p) + c$$

$$\Rightarrow x^4 + (b+n)x^3 + (p+bn+c)x^2 + (cn+pb)x + Pc = x^4 + 2nx^3 + (2p+n^2+b)x^2 + (2pn+bn)x + p^2 + bp + c.$$

Igualando coeficientes:

$$b+n = 2n \quad ; \quad cn+pb = 2pn+bn$$

$$p+bn+c = 2p+n^2+b \quad ; \quad pc = p^2+bp+c$$

$$\Rightarrow \quad b = n \quad \Rightarrow \quad p + b(b) + c = 2p + b^2 + b$$

$$\quad \quad P + b \quad \Rightarrow \quad pc = p(p+b) + c$$

$$\Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -b$$

$$\Rightarrow \quad P(x) = x^2 + bx \quad , \quad Q(x) = x^2 + bx - b$$

Mediante un simple reemplazo es fácil ver que todos los polinomios de esta forma cumplen la ecuación.

* Si $P(x)$ no fuese mónico, sea

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad ; \quad \text{considero}$$

$$P_1(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \quad \text{mónico}$$

Por hipótesis $P(x) Q(x) = P(Q(x))$

$$\frac{1}{a} ((ax^2 + bx + c) Q(x)) = (a Q^2(x) + b Q(x) + c), \quad \frac{1}{a}$$

$$(x^2 + \frac{b}{a}x + c) Q(x) = Q^2(x) + \frac{b}{a} Q(x) + \frac{c}{a}.$$

$$\Rightarrow \quad P_1(x) Q(x) = P_1(Q(x)), \quad \forall x \in$$

Por lo resuelto anteriormente, $\exists b \in$ tal que

$P_1(x) = x^2 + bx$, $Q(x) = x^2 + bx - b$
 $\Rightarrow P(x) = ax^2 + bax$, $Q(x) = x^2 + bx - b$,
 Por lo tanto, todos los pares de polinomios que cumplen son: $P(x) = ax^2 + bax$,
 $Q(x) = x^2 + bx - b \quad \forall a, b \in \mathbb{V}, a \neq 0$

2do Caso: $m = 0$ $n = 0$

$\Rightarrow P(x) = a$, $Q(x) = b$, $a, b \neq 0$

$\Rightarrow ab = a \Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow P(x) = a$, $a \neq 0$ y $Q(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{V}$

3. Encuentra todos los pares de enteros positivos (a, b) tales que $a^2 + a + 2b$ y $b^2 + b + 2a$ sean cuadrados perfectos.

(John Cuya Barrios)

Solución

Sean m y n enteros positivos tales que $a^2 + a + 2b = m^2$ y $b^2 + b + 2a = n^2$, entonces se tiene que $m > a$ y $n > b$ ó $m \geq a+1$ y $n \geq b+1$.

Si $m \geq a+2$ y $n \geq b+2$, entonces $m^2 \geq a^2 + 4a + 4$ y $n^2 \geq b^2 + 4b + 4$, luego

$$m^2 + n^2 \geq (a^2 + 4a + 4) + (b^2 + 4b + 4)$$

$$(a^2 + a + 2b) + (b^2 + b + 2a) \geq (a^2 + 4a + 4) + (b^2 + 4b + 4)$$

$$0 \geq a + b + 8.$$

Llegamos a una contradicción, entonces se cumple una de las igualdades $m = a+1$ ó $n = b+1$.

Sea sin pérdida de generalidad $m = a+1$, entonces $a^2 + a + 2b = (a+1)^2$, $2b = a+1$, reemplazando en $b^2 + b + 2a = n^2$, se tiene que

$$b^2 + b + 2(2b-1) = n^2$$

$$b^2 + 5b - 2 = n^2$$

$$4b^2 + 20b - 8 = 4n^2$$

$$(2b+5)^2 - 33 = (2n)^2$$

$$(2b+5)^2 - (2n)^2 = 33$$

$$(2b+5+2n)(2b+5-2n) = 33$$

Entonces $2b+5+2n=33$ y $2b+5-2n=1$ ó $2b+5+2n=11$ y $2b+5-2n=3$, de donde se obtienen las soluciones $b=6, n=8$ y $b=1, n=2$. Finalmente las soluciones son $(a, b) = (1, 1), (6, 11)$ y $(11, 6)$.

4. En una secuencia de 900 términos, donde cada uno vale 1, 2 ó 3, se cumple que en 5 términos consecutivos cualesquiera hay por lo menos un 1, en 4 términos consecutivos cualesquiera hay por lo menos un 2 y en 3 términos consecutivos cualesquiera hay por lo menos un 3. ¿Cuál es la mayor cantidad de unos que puede tener la secuencia?

(John Cuya Barrios)

Solución:

Primero probaremos lo siguiente

- En 8 términos consecutivos cualesquiera, donde ninguno de ellos es un extremo, hay como máximo tres 1's.

Supongamos entre en 8 términos consecutivos, donde ninguno de ellos es un extremo, la cantidad de 1's es mayor o igual que 4, entonces la cantidad de 2's más la cantidad de 3's es menor o igual que 4, pero entre los primeros 4 términos hay por lo menos un 2 y entre los últimos 4 términos hay un 2, entonces hay por lo menos dos 2's y del mismo modo se puede obtener que hay por lo menos dos 3's, entonces la cantidad de 2's es 2 y la cantidad de 3's es 2, exactamente.

Luego los dos términos iguales a 3 sólo se pueden ubicar de la siguiente forma

$$\dots X \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 3 & \\ \hline & & & 3 \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} Y \dots$$

Los términos "X" e "Y" deben ser iguales a 3, ya que en cualesquiera 3 términos consecutivos debe haber por lo menos un 3.

$$\dots 3 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline A & A & 3 & B & B & 3 & C & C \\ \hline \end{array} 3 \dots$$

Además como en cualesquiera 4 términos consecutivos debe haber por lo menos un 2, entonces uno de los términos "A" debe ser 2, uno de los términos "B" debe ser 2 y uno de los términos "C" debe ser 2, entonces la cantidad de 2's más la cantidad de 3's es por lo menos 5, contradicción.

Entonces, en 8 términos consecutivos cualesquiera, donde ninguno de ellos es un extremo, hay como máximo tres 1's.

Luego los 900 términos, dejando de lado a los tres primeros y al último término, se pueden dividir en 112 grupos de 8 términos consecutivos

$$X \quad X \quad X \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array} X$$

Entonces la mayor cantidad de unos es $2 + 112 \cdot 3 + 1 = 339$, ya que entre los tres primeros hay por lo menos un 3, donde una secuencia posible es

$$1 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad 1 \quad 2 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ \hline \end{array} \quad 1$$

(Repitiendo 111 veces el segundo grupo de 8)

Nivel 3.

1. Halla todos los valores enteros positivos que puede tomar n tal que

$$\cos(2x) = \cos^n x - \sin^n x$$
para todo número real x .

*(Jorge Tipe Villanueva)***Solución**

$$\cos 2x = \cos^n x - \sin^n x, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Como es una identidad, haciendo $x = \frac{\pi}{3}$:

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos^n \frac{\pi}{3} - \sin^n \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = \sqrt{3}^n - 1$$

Si n fuera impar, entonces $n = 2k - 1$, con $k \in \mathbb{Z}^+$.

$$\Rightarrow 2^{2k-2} = \sqrt{3}^{2k-1} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{3^k}{2^{2k-2} + 1} \in \mathbb{Q}$$

Que no es posible, pues $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Concluimos que n es par, sea $n = 2m$, entonces

$$2^{2m-1} = \sqrt{3}^{2m} - 1 = 3^m - 1 \Leftrightarrow 4^m = 2(3^m - 1) \dots (*)$$

Luego: $4^m = 2(3^m - 1) < 2 \cdot 3^m \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^m < 2 < \left(\frac{4}{3}\right)^3$

y como $\frac{4}{3} > 1$ entonces $m < 3$ y como m es entero positivo, entonces $m = 1$ ó $m = 2$, notamos, además que ambos valores son soluciones de (*). Luego, $n = 2$ ó $n = 4$.

Finalmente, basta verificar que $n = 2$ y $n = 4$, hacen que

$$\cos 2x = \cos^n x - \sin^n x$$

sea una identidad.

En efecto: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (Conocido)

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

2. Halla todos los valores de k para los cuales es posible dividir cualquier región triangular en k cuadriláteros de igual área.

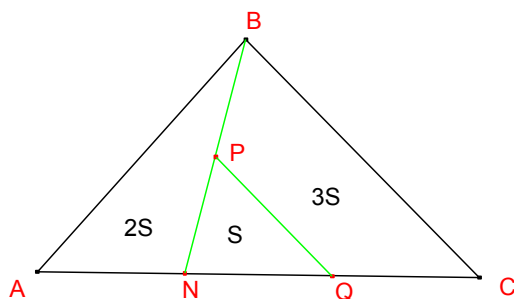
*(Jorge Tipe Villanueva)***Solución 1**

Demostraremos por inducción que para todo $k \geq 2$ es posible tal división.

Si $k = 2$: Dado el triángulo ABC, sea N en AC tal que $2 AN = NC$ y sean P y Q los puntos medios de NB y NC respectivamente.

Como $PQ \parallel BC$ entonces los triángulos NPQ y NBC son semejantes de razón 2, luego

$$\frac{[NBC]}{[NPQ]} = 2^2 = 4$$



Sea $[NPQ]=S$

Entonces $[PBCQ]=3S$ y como $2AN=NC$ entonces $[ABM]=2S$. Con esto notamos que los cuadriláteros ABPQ y PBCQ tiene igual área, por lo tanto es posible dividir un triángulo en dos cuadriláteros de igual área.

Si $k=n$, es decir, es posible dividir cualquier triángulo en l cuadriláteros de igual área.

Se debe demostrar que es posible dividir un triángulo en $k=n+1$ cuadriláteros de igual área.

Dado un triángulo ABC escogamos P y Q en AB y BC respectivamente de manera que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QB} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

Luego existe S tal que $[PBQ]=n S$ y $[ABC]=(n+1)S$, entonces $[APQC] = S$, por hipótesis el triángulo PBQ se puede dividir en n cuadriláteros de igual área y cada uno de ellos tiene área S y considerando el cuadrilátero APQC hemos dividido el triángulo ABC en $n+1$ cuadriláteros de igual área. La inducción está completa.

Solución 2

Veremos tres casos:

- $k=2$ similar a la solución 1.
- $k=3$. Sea ABC un triángulo cualquiera con baricentro G. Sean M, N y P los puntos medios de los lados AB, BC y AC respectivamente. No es difícil probar que los cuadriláteros AMGP, BNGM y PCNG tiene igual área.
- $k>3$. Sea ABC un triángulo cualquiera y A' y C' son puntos sobre AB y BC respectivamente tales que:

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k}}$$

Por teorema de Tales $A'C' \parallel AC$ y además $\frac{[A'BC']}{[ABC]} = \frac{3}{k}$.

Sea $3S$ el área de $[A'BC']$, por el proceso anterior podemos dividir $A'BC'$ en 3 cuadriláteros de área S . Ahora dividimos cada uno de los segmentos $A'C'$ y AC en $k-3$ segmentos de igual longitud. Sean $A'=P_0, P_1, \dots, P_{k-3}=C'$ los puntos sobre $A'C'$ y $A=Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-3}=C$.

$$P_0P_1=P_1P_2 = \dots = P_{k-4}P_{k-3} = \frac{A'C'}{k-3}$$

$$Q_0Q_1=Q_1Q_2 = \dots = Q_{k-4}Q_{k-3} = \frac{AC}{k-3}$$

El cuadrilátero $Q_{i-1}P_{i-1}P_iQ_i$ es un trapecio por ser $A'C' \parallel AC$ cuya altura h es la distancia entre $A'C'$ y AC . Su área es

$$[Q_{i-1}P_{i-1}P_iQ_i] = \frac{P_{i-1}P_i + Q_{i-1}Q_i}{2} \cdot h = \frac{A'C' + AC}{2} \cdot \frac{h}{k-3}$$

Por lo tanto los $k-3$ cuadriláteros formados $Q_{i-1}P_{i-1}P_iQ_i$ tienen la misma área y esa área es S .

3. Un par (m, n) de enteros positivos se denomina “enlazado” si m divide a $3n + 1$ y n divide a $3m + 1$. Si a, b, c son enteros positivos distintos tales que (a, b) y (b, c) son pares enlazados, demuestra que el número 1 pertenece al conjunto $\{a, b, c\}$.

(Jorge Tipe Villanueva)

Solución

Primero calculemos todos los pares trípticos (m, n) con $m, n > 1$.

$$\text{Por hipótesis } \frac{3m+1}{n} \in \mathbb{Z}^+, \quad \frac{3n+1}{m} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow \frac{(3m+1)(3n+1)}{mn} = \frac{9mn + 3(m+n) + 1}{mn} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow \frac{3(m+n) + 1}{mn} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{Además } m > 1 \text{ y } n > 1 \Rightarrow (m-1)(n-1) > 0$$

$$\Rightarrow mn > m+n-1 \Rightarrow mn \geq m+n \Rightarrow \frac{m+n}{mn} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{3(m+n)+1}{mn} \leq 3 + \frac{1}{mn} < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3(m+n)+1}{mn} \in \{1, 2, 3\}$$

1er Caso: $3(m+n) + 1 = mn \Rightarrow 10 = mn - 3m - 3n + 9$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (m-3)(n-3) = 10 \\ \begin{array}{cc} 1 & 10 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{array} \end{array} \Rightarrow (m, n) \in \{(4, 13), (5, 8), (8, 5), (13, 4)\}$$

$$10 \quad 1$$

2do Caso: $3(m+n) + 1 = 2mn \Rightarrow 11 = 4mn - 6m - 6n + 9$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} (2m-3) & (2n-3) & = 11 \\ \downarrow & \downarrow & \\ 1 & & \\ \uparrow & & \\ & & 1 \end{array} \Rightarrow (m, n) \in \{(2, 7), (7, 2)\}$$

3er Caso: $3(m+n) + 1 = 3mn \Rightarrow 1 = 3 \cdot (mn - m - n) (\Rightarrow \Leftarrow)$

Los únicos pares trípticos (m, n) con $m, n > 1$ son:

$$\{(2, 7), (7, 2), (4, 13), (13, 4), (5, 8), (8, 5)\} = A$$

Hipótesis auxiliar: $1 \notin \{a, b, c\}$

$$\Rightarrow (a, b) \in A \text{ y } (b, c) \in A.$$

Además como $a \neq c$, los pares no pueden ser simétricos. Esto significa que b pertenece exactamente a dos pares distintos, pero no en dos conjuntos de la colección $\{2, 7\}$, $\{4, 13\}$, $\{5, 8\}$ que tengan un elemento en común. ($\Rightarrow \Leftarrow$)

Debe ocurrir que $1 \in \{a, b, c\}$.

4. En cada una de las casillas de un tablero de $n \times n$, con $n \geq 3$, se escribe un número entero positivo de tal modo que el valor absoluto de la diferencia de los números escritos en dos casillas vecinas cualesquiera es menor o igual que 2 (dos casillas vecinas son aquellas que tienen un lado común).
- Muestra un tablero de 5×5 en el cual se hayan escrito 15 números enteros distintos siguiendo la regla indicada.
 - Halla, en función de n , la máxima cantidad de números distintos que puede tener el tablero de $n \times n$ casillas.

(John Cuya Barrios)

Solución

Parte a:

Un ejemplo es:

1	2	4	6	8
3	4	6	8	10
5	6	8	10	12
7	8	10	12	14
8	9	11	13	15

Parte b:

Primero analicemos lo siguiente:

(I) Si A y B son dos números ubicados dentro de un rectángulo de $m \times p$, que a la vez se encuentra dentro del tablero de $n \times n$, entonces $|A - B| \leq 2(m + p - 2)$.

Esto se debe a que

	A				
	X ₁				
	X ₂				
	X _k	B	

Si entre A y B están los números X_1, X_2, X_3, \dots , la máxima diferencia entre A y X_1 , X_1 y X_2 , X_2 y X_3, \dots es 2, de donde la máxima diferencia entre A y X_2 es 4, entre A y X_3 es 6, ..., entre A y X_k es $2k$, entre A y B es $2(k + 1)$. El máximo valor de k es $m + p - 3$, y se da cuando A y B se ubican en esquinas opuestas, por lo cual $|A - B| \leq 2(m + p - 2)$.

(II) Como un caso particular de (I), si A y B son los extremos de un cuadrado de 2×2 ($A < B$), entonces $B - A \leq 4$, y Si $B - A = 4$, entonces los otros dos números X e Y son iguales y $X = Y = A + 2 = B - 2$.

A	X
Y	B

Sean m y M el menor y mayor número escrito en el tablero, entonces, por (I), $|M - m| \leq 2(2n - 2) = 4n - 4$, o sea la mayor cantidad de números distintos que puede tener el tablero es $4n - 3$, ya que se da cuando aparecen todos los números desde el m hasta el M , inclusive.

Sea $F(n)$ la máxima cantidad de números distintos en el tablero de $n \times n$.

- Si $F(n) = 4n - 3$, entonces $M - m = 4n - 4$, sea $m = 1$ (no afecta la generalidad de la solución), entonces $M = 4n - 3$ y como la diferencia entre estos números es máxima, m y M deben estar en esquinas opuestas.

1					
	X ₁				
		X ₂			
			...		

				X_{n-2}	
					$4n-3$

Por **(II)**, se tiene que la máxima diferencia entre 1 y X_1 , X_2 y X_3, \dots, X_{n-2} y $4n - 3$ es 4, entonces $X_1 = 5$, $X_2 = 9, \dots, X_{n-2} = 4n - 7$, y nuevamente por **(II)** se tendría que todos los números escritos en el tablero son impares, lo cual nos daría en total sólo $2n - 1$ números distintos.

Esto también nos dice que $M - m$ no puede ser igual $4n - 3$, si queremos hallar el máximo.

- Si $F(n) = 4n - 4$, entonces $M - m = 4n - 5$, sea $m = 1$, entonces $M = 4n - 4$ y como esta diferencia sigue siendo máxima, estos números tienen que estar ubicados en esquinas opuestas y además tienen que estar todos los números desde el 1 hasta el $4n - 4$, inclusive.

1					
	X_1				
		X_2			
			...		
				X_{n-2}	
					$4n-4$

Del mismo modo se tiene que la máxima diferencia entre 1 y X_1 , X_2 y X_3, \dots, X_{n-2} y $4n - 3$ es 4, pero en este caso una de la diferencias $X_{i+1} - X_i$ es igual a 3, y todas las demás valen 4.

1	3		$2k-1$					
3	5		...					
...			...					
$2k-1$	$4k-3$					
				$4k$				$2k+2n-2$
			
			
				...			$4n-8$	$4n-6$
				$2k+2n-2$	$4n-6$	$4n-4$

Supongamos que $X_i = 4k - 3$ y $X_{i+1} = 4k$ ($k \geq 1$). Como el 2 no aparece en el cuadrado superior izquierdo (de $k \times k$) y como tiene que estar de todas maneras, supongamos sin perder generalidad que se encuentra en la zona naranja, entonces por **(I)** la diferencia entre ese número 2 y el número $2k + 2n - 2$ es como máximo $2(n - 1)$,

$$(2k + 2n - 2) - 2 \leq 2(n - 1)$$

$$k \leq 1, \text{ entonces } k = 1.$$

Del mismo modo tiene que estar el $4n - 3$, supongamos sin perder generalidad que se encuentra en la zona verde, entonces por **(I)** la diferencia entre ese número $4n - 3$ y el número $2k - 1$ es como máximo $2(n - 1)$,

$$(4n - 3) - (2k - 1) \leq 2(n - 1)$$

$$n \leq k, \text{ contradicción.}$$

Entonces $F(n) = 4n - 5$, y un ejemplo en función de n es

1	2	4	6	$2n-8$	$2n-6$	$2n-4$	$2n-2$
3	4	6	8			$2n-6$	$2n-4$	$2n-2$	$2n$
5	6	8	10			$2n-4$	$2n-2$	$2n$	$2n+2$
7	8	10	12			$2n-2$	$2n$	$2n+2$	$2n+4$
...			
...				
$2n-7$	$2n-6$	$2n-4$	$2n-2$			$4n-16$	$4n-14$	$4n-12$	$4n-10$
$2n-5$	$2n-4$	$2n-2$	$2n$			$4n-14$	$4n-12$	$4n-10$	$4n-8$
$2n-3$	$2n-2$	$2n$	$2n+2$			$4n-12$	$4n-10$	$4n-8$	$4n-6$
$2n-2$	$2n-1$	$2n+1$	$2n+3$	$4n-11$	$4n-9$	$4n-7$	$4n-5$