

Solucionario Cuarta Fase IV ONEM

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana

Huampaní, Diciembre 2007

Los enunciados y soluciones de este documento fueron elaborados por: John Cuya, Claudio Espinoza, Jorge Tipe y Sergio Vera.

1. Nivel 1

Problema 1.- Se tiene un tablero como el siguiente:

- Ubica en las casillas del tablero los números 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17 de modo que la suma de los números de cada fila sea un número primo.
- Demuestra que no es posible ubicar los números 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17 en las casillas del tablero, de modo que la suma de los números de cada fila sea un cuadrado perfecto.

(Claudio Espinoza Ch.)

Solución:

- En este caso basta con dar un ejemplo:

1	3	7
5	9	15
11	13	17

cumple pues $1+3+7=11$, $5+9+15=29$ y $11+13+17=41$ son primos.

- Supongamos que fuese posible, la menor suma posible en una fila es $1+3+5 = 9$ y la mayor suma suma posible es $13 + 15 + 17 = 47$, entonces las sumas en cada fila sólo pueden ser 9, 16, 25 y 36. Ahora como la suma de todos los números es $1 + 3 + \dots + 17 = 81$, entonces en al menos una fila la suma debe ser 36, pues de lo contrario todas las filas sumarían a lo más $25 + 25 + 25 = 75$ que no puede ser pues la suma es 81. Luego una fila debe sumar 36, pero esto es una contradicción pues cada fila está compuesta por tres número impares, y debido a esto la suma en cada fila debe ser un número impar y no puede ser 36.

Problema 2.- En 9 bolillas están escritos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, uno en cada bolilla. Israel, Jonathan y Liz se reparten las bolillas de la siguiente manera: Israel eligió cuatro bolillas que suman 18, Jonathan eligió tres que suman 15 y Liz se quedó con las dos restantes. Si ninguno de ellos tiene dos bolillas con números consecutivos, ¿qué bolillas tiene cada uno?

(Jhon Cuya B.)

Solución:

Sean los números de las bolillas para cada persona los siguientes:

$$\text{Israel} \rightarrow a, b, c, d; \text{ con } a < b < c < d$$

$$\text{Jonathan} \rightarrow m, n, p; \text{ con } m < n < p$$

$$\text{Liz} \rightarrow x, y; \text{ con } x < y$$

De acuerdo al problema, la suma de los números en las bolillas que eligió Israel es 18 y la suma de los números en las bolillas que eligió Jonathan es 15. Como la suma de todos los números en las bolillas es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, entonces la suma de los números en las bolillas que eligió Liz debe ser $45 - 18 - 15 = 12$, pues entre los tres cogieron las nueve bolillas.

Por otro lado, ninguna persona debe tener dos bolillas con números consecutivos, entonces

$$a + 6 \leq b + 4 \leq c + 2 \leq d \tag{1}$$

$$m + 4 \leq n + 2 \leq p \tag{2}$$

$$x + 2 \leq y \tag{3}$$

Utilizando (1), la suma de los números escritos en las bolillas de Israel sería:

$$18 = a + b + c + d \geq a + (a + 2) + (a + 4) + (a + 6) = 4a + 12$$

de lo cual $a \leq 1,5$ y dado que a es un número de los escritos en las nueve bolillas solo puede ser 1. Por lo tanto $a = 1$.

Como Israel eligió la bolilla con número 1, entonces no pudo elegir la bolilla con número 2, pues no puede tener dos bolillas con números consecutivos. Entonces la bolilla con el número 2 solo pudo haber sido elegida por Liz o por Jonathan. Si Liz fue la que escogió la bolilla con el número 2, entonces su otra bolilla tendría que tener escrito el número 10, dado que Liz escogió dos bolillas con suma 12; pero esto no es posible pues no hay ninguna bolilla con el número 10 escrito. Por tanto, la bolilla con el número 2 fue elegida por Jonathan ($m = 2$).

Ahora analicemos los mayores números que tienen Israel, Jonathan y Liz escritos en sus bolillas. Israel tiene las bolillas con los números 1, b , c y d que suman 18, utilizando (1):

$$18 = 1 + b + c + d \leq 1 + (d - 4) + (d - 2) + d = 3d - 5$$

de lo cual $d \geq 7,666\dots$ y como d es uno de los números escritos en las bolillas solo puede ser 8 ó 9. Jonathan tiene las bolillas con los números 2, n y p que suman 15, utilizando (2):

$$15 = 2 + n + p \leq 2 + (p - 2) + p = 2p$$

por lo cual $p \geq 7,5$ y como p es uno de los números escritos en las bolillas solo puede ser 8 ó 9. Como $d \neq p$, entonces $\{d, p\} = \{8, 9\}$. Liz tiene las bolillas con los números x y y que suman 12, utilizando (3):

$$12 = x + y \leq (y - 2) + y = 2y - 2$$

de lo cual $y \geq 7$ y como y es uno de los números escritos en las bolillas solo puede ser 7, 8 ó 9. Pero 8 y 9 son d y p , en algún orden, en consecuencia $y = 7$. Además $x + y = 12$, por lo cual, $x = 5$. En conclusión, Liz tiene las bolillas con los números 5 y 7.

Ahora analicemos las posibilidades para p . Si $p = 8$, entonces Jonathan tendría las bolillas con los números 2, n y 8; que suman 15, de lo cual $n = 5$; pero la bolilla con el número 5 la escogió Liz. Por lo tanto $p = 9$ y además $n = 4$. En consecuencia, Jonathan tiene las bolillas con los números 2, 4 y 9.

De lo obtenido y como Israel tiene las bolillas restantes a Liz y Jonathan, entonces él tiene las bolillas con los números 1, 3, 6 y 8.

Finalmente, la distribución de las bolillas es:

$$\begin{aligned} \text{Israel} &\rightarrow 1, 3, 6, 8 \\ \text{Jonathan} &\rightarrow 2, 4, 9 \\ \text{Liz} &\rightarrow 5, 7 \end{aligned}$$

Problema 3.- Decimos que un número natural es *variado* si todos sus dígitos son distintos entre sí. Por ejemplo, los números 9345 y 1670 son variados, pero 2007 y 1821 no lo son.

- a) Encuentra un número N de 9 dígitos tal que N y $2N$ sean variados.
- b) ¿Cuál es el mayor número M tal que M y $4M$ son números variados?

(Jorge Tipe V.)

Solución:

- Podemos tomar $N = 123456789$ pues $2N = 246913578$, y ambos números son variados.
- Busquemos primero el mayor número variado. Como un número variado no tiene dígitos repetidos, no puede tener más de 10 dígitos, es decir, un número variado tiene como máximo 10 dígitos. A partir de esto último, es fácil llegar a que el mayor número variado es

$$9876543210,$$

luego, si el número $4M$ es variado se cumple que:

$$4M \leq 9876543210$$

de donde

$$M \leq 2469135802$$

necesitamos encontrar ahora el mayor número variado menor o igual que 2469135802. Como 2469135802, 2469135801 y 2469135800 no son variados, buscamos los números variados de la forma 24691357 ab , notamos que a como máximo es 8 y para ese valor $b = 0$, por lo tanto el mayor número variado menor o igual que 2469135802 es 2469135780, con esto concluimos que

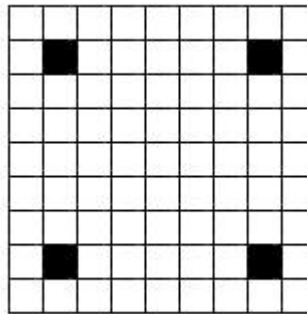
$$M \leq 2469135780,$$

finalmente, como

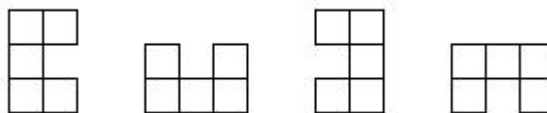
$$4 \cdot 2469135780 = 9876543120$$

es un número variado, concluimos que el mayor valor que puede tomar M es 2469135780.

Problema 4.- Se tiene el siguiente tablero de 9×9 donde 4 de sus casillas están pintadas de negro y las demás son blancas, como se muestra en la figura:



Como se puede observar, hay grupos de 5 casillas blancas que forman una de las siguiente figuras:



¿Cuál es el mínimo número de casillas blancas que se deben pintar de negro para que en el tablero no hayan grupos de 5 casillas blancas formando figuras como las mostradas?

(Jhon Cuya B.)

Solución:

Primero probaremos el siguiente lema:

Lema. De las 8 casillas del borde de un cuadrado de 3×3 debe haber por lo menos 2 casillas pintadas

Demostración. Si hubiese sólo una casilla pintada, entonces ésta tiene que estar en alguna de las siguientes posiciones: si está en alguna de las casillas 1, 2, 3 ó 4, entonces habría 5 casillas blancas (marcadas con una X) que forman la figura prohibida.

1	1	1	X	X	2	X	X	X	4	X	X
X		X	X		2	X		X	4		X
X	X	X	X	X	2	3	3	3	4	X	X

Luego, el tablero inicial de 9×9 puede dividirse en 9 cuadrados de 3×3 ; por el lema, en cada uno de ellos la mínima cantidad de casillas pintadas debe ser 2, entonces el mínimo número de casillas pintadas en todo el tablero es $2 \times 9 = 18$. Ahora debemos mostrar un ejemplo, el cual puede ser el siguiente:

		X				X		
	N		X				N	
X				X				X
	X				X			
		X				X		
			X				X	
X				X				X
	N				X		N	
		X				X		

2. Nivel 2

Problema 1.- Encuentra todos los números primos m y n tales que $m < n$ y los números $2m + n$, $m + 2n$ y $m + n - 18$ sean también primos.

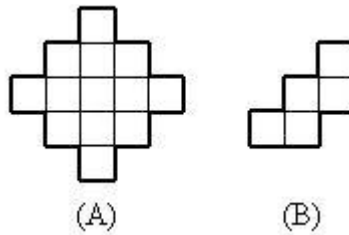
(Jhon Cuya B.)

Solución:

Como m y n son números primos se tiene que $m \geq 2$ y $n \geq 2$. Entonces $2m + n \geq 6$ y $m + 2n \geq 6$, pero el único número primo par es el 2, entonces $2m + n$ y $m + 2n$ son impares, por lo cual m y n son impares. Luego $m + n - 18$ es par, entonces $m + n - 18 = 2$, $m + n = 20$.

Las únicas soluciones para $m + n = 20$ con m y n números primos son $m = 3$, $n = 17$ y $m = 7$, $n = 13$, sin embargo la segunda no cumple que $2m + n = 27$ y $m + 2n = 33$ son números primos. Finalmente $m = 3$ y $n = 17$.

Problema 2.- Daniel dispone de fichas cuadradas de lado 1, con las cuales forma polígonos. Decimos que uno de los polígonos formados es *incaico* si todos sus lados tienen longitud 1. Por ejemplo

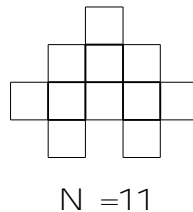


el polígono (A) es incaico y el polígono (B) no lo es. Demuestra que para todo entero $N \geq 11$, Daniel puede construir un polígono incaico formado con N fichas.

(Jorge Tipe V.)

Solución:

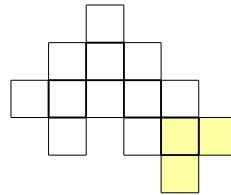
Veamos, en primer lugar, que es posible formar un polígono incaico usando 11 fichas:



si colocamos adecuadamente la siguiente pieza (que llamaremos triminó) :

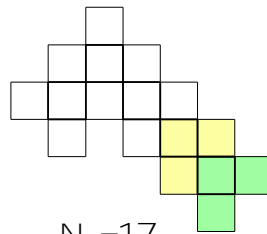


podemos conseguir un polígono incaico formado por 14 fichas:



$$N = 14$$

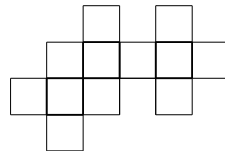
si seguimos colocando triminós en la parte inferior derecha del polígono incaico conseguiremos otros formados por 17, 20, 23, 26,... fichas:



$$N = 17$$

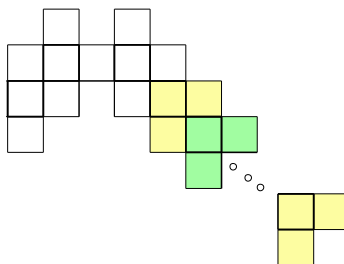
En general, si colocamos k triminós en la forma indicada podemos conseguir un polígono incaico formado por $11+3k$ fichas. Es decir, hemos resuelto el problema cuando N es mayor o igual que 11 y deja resto 2 al ser dividido por 3.

De forma similar, podemos ver que es posible formar un polígono incaico con 12 fichas:



$$N = 12$$

colocamos triminós de la misma forma que en el caso anterior:

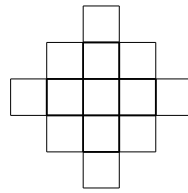


$$N = 12 + 3k$$

con esto podemos construir polígonos incaicos formados por 12, 15, 18, 21, ... Con esto queda resuelto el problema cuando N es un múltiplo de 3, mayor o igual que 12.

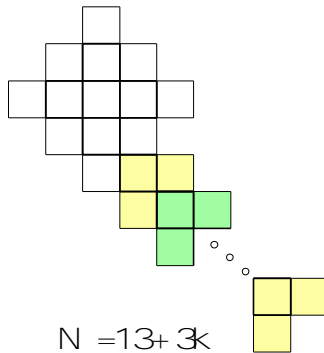
Queda por analizar el problema cuando N es un múltiplo de 3, más 1.

Veamos el ejemplo para $N=13$:



$$N = 13$$

colocando triminós conseguimos polígonos incaicos formados por 16, 19, 22, 25, ...



$$N = 13 + 3k$$

Con esto queda demostrado que, para cada entero $N \geq 11$, podemos formar un polígono incaico con N fichas.

Problema 3.- Halla todos los números enteros r para los cuales es posible encontrar una función $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ que cumple la siguiente condición:
la sucesión

$$f(1) \times f(3); f(2) \times f(4); f(3) \times f(5); \dots; f(n) \times f(n+2); \dots$$

es una progresión aritmética de razón r .

Nota.- \mathbb{Z}^+ es el conjunto de los números enteros positivos, $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

(Sergio Vera P.)

Solución:

Supongamos que existe un entero r que cumple las condiciones del problema, entonces existe alguna función f para la cual $f(1) \times f(2); f(2) \times f(4); f(3) \times f(5); \dots; f(n) \times f(n+2); \dots$ formen una progresión aritmética de razón r .

Entonces:

$$\begin{aligned} f(n) \times f(n+2) - f(n+2) \times f(n+4) &= 2r \\ \Rightarrow f(n+2) \times (f(n) - f(n+4)) &= 2r \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(n+2)$ es un divisor de $2r$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots$. Es decir, $f(3), f(4), f(5), \dots$ son divisores de $2r$ (no necesariamente positivos). Por lo tanto $\{f(3), f(4), f(5), \dots\}$

es un conjunto que tiene un máximo y un mínimo, pues están acotados (en valor absoluto) por $2r$; sean el máximo $f(p)$ y el mínimo $f(q)$.

Ahora analizaremos por casos los posibles valores de r :

- Caso 1: $r > 0$

Tomemos las siguientes ecuaciones:

$$\text{Para } n = p : f(p+2)(f(p) - f(p+4)) = 2r \quad (4)$$

$$\text{Para } n = p - 4 : f(p-2)(f(p-4) - f(p)) = 2r \quad (5)$$

$$\text{Para } n = p - 2 : f(p)(f(p-2) - f(p+2)) = 2r \quad (6)$$

En (4) y en (5), como $f(p)$ es el máximo y $r > 0$, entonces $f(p+2)$ es mayor que cero y $f(p-2)$ es menor que cero. Utilizando lo encontrado en (6), $f(p)$ debería ser menor que cero, pero de acuerdo a ello $f(p+2)$ sería mayor a $f(p)$ (pues $f(p+2)$ es mayor que cero), lo que contradice el supuesto que hay un máximo y que exista algún r mayor a cero que cumpla las condiciones del problema.

- Caso 2: $r = 0$

En este caso, basta elegir la sucesión $f(n) = 0$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$ que cumple las condiciones del problema para $r = 0$.

- Caso 3: $r < 0$

Tomemos las siguientes ecuaciones:

$$\text{Para } n = q : f(q+2)(f(q) - f(q+4)) = 2r \quad (7)$$

$$\text{Para } n = q - 4 : f(q-2)(f(q-4) - f(q)) = 2r \quad (8)$$

$$\text{Para } n = q - 2 : f(q)(f(q-2) - f(q+2)) = 2r \quad (9)$$

En (7) y en (8), como $f(q)$ es el mínimo y $r < 0$, entonces $f(q+2)$ es menor que cero y $f(q-2)$ es mayor que cero. Utilizando lo encontrado en (9), $f(q)$ debería ser mayor que cero, pero de acuerdo a ello $f(q+2)$ sería menor a $f(q)$ (pues $f(q+2)$ es menor que cero), lo que contradice el supuesto que hay un mínimo y que exista algún r menor a cero que cumpla las condiciones del problema.

Por lo tanto el único valor de r que cumple las condiciones del problema, es $r = 0$.

Problema 4.- Enrique dibujó $2n$ rectas en el plano, donde n es un entero positivo, y se dio cuenta de que no habían tres rectas concurrentes (tres rectas con un punto común). Luego pintó de rojo cada punto de intersección y contó la cantidad de puntos rojos de

cada recta. Si de estas $2n$ cantidades, la mitad de ellas valen 2007 y la otra mitad valen 2008, ¿cuántas rectas dibujó Enrique?

(Jhon Cuya B.)

Solución:

En primer lugar notemos que dos rectas paralelas tienen igual cantidad de puntos rojos sobre ellas. Luego sean A_1, A_2, \dots, A_k las cantidades de cada grupo de paralelas que tienen 2007 puntos rojos sobre ellas y sean B_1, B_2, \dots, B_s las cantidades de cada grupo de paralelas que tienen 2008 puntos rojos sobre ellas. Pero si una recta está en el grupo que tiene A_i elementos, entonces es intersectada por las $2n - A_i$ rectas que no son paralelas a ella, es decir $2n - A_i = 2007$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Similarmente $2n - B_j = 2008$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Sumando las r primeras ecuaciones que obtuvimos tenemos

$$\sum_{i=1}^r 2n - A_i = \sum_{i=1}^r 2007 \Rightarrow 2nr - \sum_{i=1}^r A_i = 2007r.$$

Sumando las s ecuaciones siguientes obtenemos que

$$\sum_{j=1}^s 2n - B_j = \sum_{j=1}^s 2008 \Rightarrow 2ns - \sum_{j=1}^s B_j = 2008s.$$

Pero por condición del problema $\sum_{i=1}^r A_i = \sum_{j=1}^s B_j = n$, luego

$$2nr - n = 2007r \wedge 2ns - n = 2008s \Rightarrow n(2r - 1) = 2007r \wedge n(2s - 1) = 2008s$$

Como s y $2s - 1$ son coprimos, entonces $2s - 1$ es un divisor impar de $2008 = 8 \times 251$, como 251 es primo, entonces $2s - 1 = 1$ o $2s - 1 = 251$. Si $2s - 1 = 1$, entonces $s = 1$, luego $n = 2008$. Reemplazando obtenemos $2008(2r - 1) = 2007r$ que no tiene soluciones enteras para r .

Por lo tanto $2s - 1 = 251 \Rightarrow s = 126$, reemplazando $n(251) = 2008(126)$, entonces $n = 1008$. Hallando r , $1008(2r - 1) = 2007r \Rightarrow r = 112$, que es entero, luego la situación planteada es posible. Por lo tanto Enrique dibujó 2016 rectas.

3. Nivel 3

Problema 1.- Halla todos los valores de A , tales que $0^\circ < A < 360^\circ$ y además:

$$\frac{\text{Sen } A}{\text{Cos } A - 1} \geq 1 \quad \text{y} \quad \frac{3 \text{Cos } A - 1}{\text{Sen } A} \geq 1$$

(Jorge Tipe V.)

Solución: Para poder hacer algunas operaciones con lo datos, primero hacemos algunos artificios:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\text{Sen } A}{\text{Cos } A - 1} \\ &= \frac{\text{Sen } A \times (\text{Cos } A + 1)}{(\text{Cos } A - 1) \times (\text{Cos } A + 1)} \\ &= \frac{\text{Sen } A \times (\text{Cos } A + 1)}{-(\text{Sen}^2 A)} \\ &= \frac{-\text{Cos } A - 1}{\text{Sen } A} \end{aligned}$$

Entonces, tenemos $M = \frac{-\text{Cos } A - 1}{\text{Sen } A}$ y $N = \frac{3 \text{Cos } A - 1}{\text{Sen } A}$, con $M \geq 1$ y $N \geq 1$, entonces:

$$\begin{aligned} M + N &= \frac{-\text{Cos } A - 1}{\text{Sen } A} + \frac{3 \text{Cos } A - 1}{\text{Sen } A} \\ &= \frac{2 \text{Cos } A - 2}{\text{Sen } A} \\ &= \frac{2}{M} \end{aligned}$$

pero

$$2 \leq M + N = \frac{2}{M} \leq 2$$

por lo tanto

$$M + N = \frac{2}{M} = 2$$

en consecuencia $M = 1$ y $N = 1$.

Ahora hallamos $\text{Sen } A$ y $\text{Cos } A$:

$$\begin{aligned} 4 &= 3M + N \\ &= 3 \times \left(\frac{-\text{Cos } A - 1}{\text{Sen } A} \right) + \frac{3 \text{Cos } A - 1}{\text{Sen } A} \\ &= \frac{-4}{\text{Sen } A} \end{aligned}$$

por lo cual $\text{Sen } A = -1$ y reemplazando en el valor de M se obtiene $\text{Cos } A = 0$. Finalmente, el único valor de A , entre 0° y 360° , que cumple lo hallado es $A = 270^\circ$.

Problema 2.- Asumiendo que cada punto de una recta está pintado de rojo o de azul, de manera arbitraria, demuestra que siempre es posible elegir tres puntos A , B y C en tal recta, que estén pintados del mismo color y que se cumpla:

$$\frac{AB}{1} = \frac{BC}{2} = \frac{AC}{3}.$$

(Jorge Tipe V.)

Solución:

Como cada punto de la recta se pinta de un color, podemos afirmar que hay dos puntos de la recta que están pintados del mismo color, digamos que estén pintados de rojo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que uno de los puntos rojos es 0 y el otro es 9. Ahora, supongamos que no se cumple lo pedido, es decir, que no existen tres puntos A , B y C pintados del mismo color tales que

$$\frac{AB}{1} = \frac{BC}{2} = \frac{AC}{3}.$$

Luego, el punto 3 debe ser azul pues:

$$\frac{3-0}{1} = \frac{9-3}{2} = \frac{9-0}{3},$$

análogamente el punto 6 también debe ser azul. Como los puntos 3 y 6 son azules, entonces el punto 12 tiene que ser rojo pues:

$$\frac{6-3}{1} = \frac{12-6}{2} = \frac{12-3}{3}$$

Como los puntos 0 y 12 son rojos entonces el punto 4 debe ser azul, esto es una contradicción pues los puntos 3, 4 y 6 serían azules debido a que se cumple lo siguiente:

$$\frac{4-3}{1} = \frac{6-4}{2} = \frac{6-3}{3},$$

por lo tanto existen tres puntos A , B y C con las condiciones requeridas.

Problema 3.- Decimos que un número natural de al menos dos dígitos E es *especial* si cada vez que se suman dos dígitos adyacentes de E se obtiene un divisor de E . Por ejemplo, 2124 es especial, pues los números $2+1$, $1+2$ y $2+4$ son todos divisores de 2124. Halla el mayor valor de n para el cual existen n números naturales consecutivos tales que todos ellos son especiales.

(Jorge Tipe V.)

Solución:

En primer lugar notemos que no es posible que los dos últimos dígitos de un número especial sean impares, pues su suma sería par y el número tendría que ser par. Luego, si algún número especial termina en dígito impar, el dígito de las decenas es par. Veamos algunos

números especiales consecutivos como 1010101, 1010102, 1010103, 1010104, 1010105, 1010106, es fácil verificar que todos son especiales. Luego por lo menos tenemos que n debe ser mayor o igual que 6. Veamos si es posible mejorar este ejemplo. Como $n \geq 6$, hay al menos tres números especiales impares y por ello el dígito de la decenas de estos números debe ser par. Luego estos n números especiales consecutivos necesariamente están contenidos en el siguiente conjunto de números consecutivos $A = \{\dots P0, \dots P1, \dots P2, \dots, \dots P9, \dots I0\}$, esto debido a que el número anterior a $\dots P0$ y el número posterior a $\dots I0$ no son especiales. Por lo tanto concluimos que $n \leq 11$. Ahora vamos a analizar los posibles valores de P .

- Si $P = 2$, entonces $\dots P2 = \dots 22$ no es especial, porque no es múltiplo de 4, y además $\dots P6 = \dots 26$ tampoco es especial ya que no es múltiplo de 4 y por lo tanto no es múltiplo de 8. Luego en el conjunto A hay a lo más 4 números especiales consecutivos. En este caso $n \leq 4$.
- Si $P = 4$, entonces $\dots P1 = \dots 41$ no es especial, porque no es múltiplo de 5, y además $\dots P6 = \dots 46$ no es especial porque no es múltiplo de 10. Luego en el conjunto A hay a lo más 4 números especiales consecutivos. En este caso $n \leq 4$.
- Si $P = 6$, entonces $\dots P4 = \dots 64$ no es especial, porque no es múltiplo de 10, y además $\dots P2 = \dots 62$ no es especial, porque no es múltiplo de 4 y por lo tanto no es múltiplo de 8. Luego en el conjunto A hay a lo más 6 números especiales consecutivos. En este caso $n \leq 6$.
- Si $P = 8$, entonces $\dots P2 = \dots 82$ no es especial, porque no es múltiplo de 10. Además $\dots P7 = \dots 87$ no es especial, porque no es múltiplo de 15. Luego en el conjunto A hay a lo más 4 números especiales consecutivos. En este caso $n \leq 4$.
- Si $P = 0$, entonces $\dots P0 = \dots 00$ no es especial porque ningún número es múltiplo de 0. Además si $\dots P8 = \dots 08$ fuese especial, tendría que ser múltiplo de 8, lo cual implica que el dígito de las centenas debe ser par, pero esto implicaría que los números anteriores a $\dots 08$ tendrían como dígito de centenas a un número par y como dígito de decenas al 0, lo cual implicaría que los números anteriores a $\dots 08$, si fuesen especiales tendrían que ser pares, luego no habrían dos especiales consecutivos en este caso. Por lo tanto, para obtener un $n \geq 2$, necesariamente $\dots P8 = \dots 08$ no debe ser especial. Luego en el conjunto A , los únicos números especiales pueden ser $\{\dots 01, \dots 02, \dots 03, \dots, \dots 06, \dots 07\}$, es decir $n \leq 7$.

Luego de analizar todos los casos podemos concluir que $n \leq 7$. Basta dar un ejemplo de 7 números especiales consecutivos, para lo cual sirve el ejemplo dado al inicio pues 1010101, 1010102, 1010103, 1010104, 1010105, 1010106 y 1010107 son especiales.

Problema 4.- Se tiene un rombo $ABCD$ donde los triángulos ABD y BCD son equiláteros. Sean M y N puntos de los lados BC y CD , respectivamente, tales que $m\angle MAN = 30^\circ$. Sea X el punto de intersección de las diagonales AC y BD . Prueba que $m\angle XMN = m\angle DAM$ y $m\angle XNM = m\angle BAN$.

(Jhon Cuya B.)

Solución 1:

Prolongamos DB hasta el punto P y BD hasta el punto Q de tal modo que $BP = BM = DQ$. Se sabe que $\angle ABM = \angle ABP = \angle ADQ = 120^\circ$, entonces los triángulos ABM , ABP y ADQ son congruentes, $AM = AP = AQ$ y $\angle BAM = \angle BAP = \angle DAQ = \alpha$.

Sea ω la circunferencia de centro A y radio AM . ω pasa por los puntos P y Q , ya que $AM = AP = AQ$, entonces $\angle PQM = \frac{1}{2}\angle PAM = \alpha$.

Como $\angle MAN = \angle BAC = 30^\circ$ entonces $\angle CAN = \angle BAM = \alpha$, además $\angle ACN = \angle QPM = 30^\circ$, entonces $\triangle CAN \sim \triangle PQM$ de donde $\frac{AC}{CN} = \frac{PQ}{PM}$. X es punto medio de AC y de PQ , entonces

$$\triangle CXN \sim \triangle PXM \rightarrow \angle CXN = \angle PXM \rightarrow \angle MXN = \angle PXC = 90^\circ.$$

También $\frac{XM}{XN} = \frac{XP}{XC}$, entonces $\triangle MXN \sim \triangle PXC$ de donde

$$\angle XNM = \angle XCP = \angle XAP = 30^\circ + \alpha = \angle NAB.$$

Análogamente se demuestra que $\angle XMN = \angle MAD$.

Solución 2:

Primero probaremos que $\angle MXN = 90^\circ$, para esto bastaría demostrar que

$$XM^2 + XN^2 = MN^2.$$

Sean $BM = a$, $DN = b$ y l la longitud de los lados del rombo. Sea P el punto dentro del rombo tal que $AB = AP = AD$, $\angle BAM = \angle BAP$ y $\angle DAN = \angle NAP$. Entonces los triángulos ABM y PAM son congruentes y los triángulos DAN y PAN son congruentes, por lo cual $PM = a$ y $NP = b$. Además $\angle APM = \angle APN = 120^\circ$, entonces $\angle MPN = 120^\circ$.

Por la ley de cosenos tenemos

$$MN^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab.$$

También MN puede ser obtenido a partir del triángulo MCN :

$$MN^2 = MC^2 + CN^2 - 2MC \cdot CN \cos 60^\circ = (l - a)^2 + (l - b)^2 - (l - a)(l - b),$$

igualando

$$a^2 + b^2 + ab = (l - a)^2 + (l - b)^2 - (l - a)(l - b)$$

se obtiene la ecuación

$$2ab = l^2 - al - bl \tag{1}$$

$BX = XD = \frac{l}{2}$, entonces XM y XN se pueden obtener a partir de los triángulos XBM y DXN respectivamente,

$$XM^2 = BX^2 + BM^2 - 2BX \cdot BM \cos 60^\circ = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2 - \frac{al}{2} = \frac{(l^2 - 2al + 4a^2)}{4}$$

$$XN^2 = DX^2 + DN^2 - 2DX \cdot DN \cos 60^\circ = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + b^2 - \frac{bl}{2} = \frac{(l^2 - 2bl + 4b^2)}{4},$$

entonces bastaría demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{(l^2 - 2al + 4a^2)}{4} + \frac{(l^2 - 2bl + 4b^2)}{4} &= a^2 + b^2 + ab, \\ \iff 2l^2 - 2al - 2bl + 4a^2 + 4b^2 &= 4(a^2 + b^2 + ab), \end{aligned}$$

que es verdadero por la ecuación (1). Entonces $\angle MXN = 90^\circ$.

Luego, $\angle CXN = \angle PXM$ y $\angle XPM = \angle XCN = 30^\circ$ entonces $\triangle CXN \sim \triangle PXM$, de donde $\frac{XM}{XN} = \frac{XP}{XC}$ y $\triangle MXN \sim \triangle PXC$, con lo que deducimos que $\angle XNM = \angle XCP$.

Sea \tilde{P} un punto en la prolongación de DB tal que $B\tilde{P} = BM$, como $\angle ABM = \angle AB\tilde{P}$, entonces los triángulos ABM y $AB\tilde{P}$ son congruentes y $\angle BAM = \angle B\tilde{A}\tilde{P}$, con esto tendríamos que $\angle NAB = 30^\circ + \angle BAM = \angle PAX = \angle PCX = \angle XNM$. Análogamente se demuestra que $\angle XMN = \angle MAD$.